1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-2}$ limitini L' Hospital kuralını kullanmadan

hesaplayınız.

$\frac{\pi}{x} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{t}, \quad x \to 2 \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-2} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\frac{\pi}{t} - 2} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{t \cos t}{\pi - 2t} =$$

$$\left(\sin 2t = 2 \sin t \cos t \Rightarrow \cos t = \frac{\sin 2t}{2 \sin t} \right)$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2 \sin t} \cdot \frac{t}{\pi - 2t}$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\pi - 2t)}{2 \sin t} \cdot \frac{t}{\pi - 2t}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\pi - 2t)}{\pi - 2t} \cdot \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}$$

$\pi - 2t = k \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow k \to 0$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi/2}{\sin \pi/2} \cdot \underbrace{\lim_{k \to 0} \frac{\sin k}{k}}_{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

2) Genel terimi $a_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}$ olan dizinin yakınsaklığını araştırınız.

Önce dizinin monotonluğunu araştıralım.

$$a_n = \frac{3^n}{1+3^n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{1+3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{1+3^{n+1}} \cdot \frac{1+3^n}{3^n} = \frac{3+3^{n+1}}{1+3^{n+1}} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

olduğundan verilen dizi artandır.

Yine $a_n = \dfrac{3^n}{1+3^n} < 1$ olup, verilen dizi üstten 1 ile sınırlıdır.

Artan ve üstten sınırlı olan dizi yakınsak olduğundan verilen dizi de yakınsaktır.

3) $x=-1$ için

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2-2}{(x+1)(x-1)^2} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)^{\cancel{2}}} = -1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{2-x^2} = 1$$

olup, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ olduğundan $x=-1$ noktasında

sonlu sıçrama süreksizliği vardır.

$x=1$ için

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{2-x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x - [\![x]\!]) = \lim_{x\to 1^+} 2x - \lim_{x\to 1^+} [\![x]\!]$$

$$= 2-1 = 1$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 = f(1)$ olduğundan, f fonksiyonu

$x=1$ noktasında süreklidir.

4) $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1+\sin(\pi x), & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ için $T \in \mathbb{R}^*$

alalım. $D(x+T) = D(x)$ olursa D periyodik olur.

(i) $T \notin \mathbb{Q}$ olsun.

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+T \notin \mathbb{Q}$ olup $D(x+T) \neq D(x)$

olur.

(ii) $T \in \mathbb{Q}$ olsun.

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+T \in \mathbb{Q}$ ve $x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x+T \notin \mathbb{Q}$

olup $D(x+T) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1+\sin(\pi x + \pi T), & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Ile $D(x+T) = D(x) \Rightarrow T \in \mathbb{Z}$ olmalıdır.

* D periyodik olup esas peryodu $T_D = 1$ dir.

b) yukarıdan hareketle $k \in \mathbb{Z}$ ve $k \notin \mathbb{Z}$ olsun.

$k \in \mathbb{Z}$: $(x_n) \subset \mathbb{R}$ ve $x_n \to k$ olmak üzere

$D(x_n) = \begin{cases} 1, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 1+\sin(\pi x_n), & x_n \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ için $D(x_n) \to 1$

yani $D(x_n) \to D(k)$ olup D, $\mathbb{Z}$-de süreklidir.

$k \notin \mathbb{Z}$: $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ ve $x_n \to k$, $(y_n) \in \mathbb{Q}^t$ ve $y_n \to k$

alalım. $D(x_n) \to 1$ iken $D(y_n) \to 1+\sin k\pi$ olup

Heyne göre süreksizdir.

$\therefore S_D = \mathbb{Z}$ olur.

⑤ $f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$ ve $f_2(x) = \log_{x+1}(x^2-3x+2)$

olmak üzere

$f(x) = (f_1 + f_2)(x)$ old. dan $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$'dir.

$\arcsin: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ old. dan

$$D_{f_1} = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x^2-1}{x} \leq 1,\ x \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x} + 1 \geq 0 \ \wedge\ \frac{x^2-1}{x} - 1 \leq 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x-1}{x} \geq 0 \ \wedge\ \frac{x^2-x-1}{x} \leq 0 \right\}$$

x		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$\frac{x^2+x-1}{x}$	$-$	0	$+$		$+$	$\emptyset$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-x-1}{x}$	$-$		$-$	0	$+$	$\emptyset$	$-$		$-$	0	$+$

$$D_{f_1} = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$D_{f_2} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x+1 > 0,\ x \neq 0,\ x^2-3x+2 > 0 \right\}$$

		1		2	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_{f_2} = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right) \text{ bulunur.}$$